Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Equações de Kolmogorov

Tempos de parada

Uma va $T \geq 0$, definida no mesmo espaço de probabilidades que (X_t), é dita um *tempo de parada* para (X_t) se o evento $\{T \leq t\}$ não depender de $(X_s)_{s>t}$ para todo t

Teorema 1 (Ppdde Forte de Markov)

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\mu, \mathbf{Q})$ e T um tempo de parada para (X_t).

Então, dados $\{T < \infty\}$ e $\{X_T = x\}$,

$$(X_{T+t})_{t\geq 0} \sim \text{PMS}(\delta_x, \mathbf{Q}),$$

independentemente de $(X_s)_{s\leq T}$.

Eqs Kolmogorov (cont)

Teorema 2

Seja (X_t) um processo de saltos cont à dir em $\mathcal{S}$ *finito*. Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz em $\mathcal{S}$ com matriz de saltos $\mathbf{\Pi}$. São equivalentes:

(a) Dado que $X_0 = x$, a cadeia de saltos (Y_n) é uma $\mathrm{CM}(\delta_x, \mathbf{\Pi})$, e para $n \geq 1$, dados $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$, os tempos entre saltos $T_1, \ldots, T_n$ são va's exponenciais independentes com taxas $q_{Y_0}, \ldots, q_{Y_{n-1}}$, resp.

(b) Para $t, h > 0$, dado $X_t = x$, X_{t+h} é independente de $(X_s)_{s \leq t}$ e, uniformemente em t,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = y \,|\, X_t = x) = \delta_{xy} + q_{xy} h + o(h);$$

(c) Dados $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ e $x_0, \ldots < x_{n+1} \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \,|\, X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

onde $\left\{\mathbf{P}(t) = \big(P_{xy}(t);\, x, y \in \mathcal{S}\big),\ t \geq 0\right\}$ é a solução da eq avançada

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}.$$

Dem. Teo 2

(a $\Rightarrow$ b) $\quad \mathbb{P}_x(X_h = x) \overset{(1)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 > h) = e^{-q_x h} = 1 + q_{xx} h + o(h)$

e para $y \neq x$

$$\mathbb{P}_x(X_h = y) \overset{(2)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 <, Y_1 = y, T_2 > h) = (1 - e^{-q_x h})\pi_{xy} e^{-q_y h}$$
$$= q_{xy} h + o(h)$$

Logo,

$$1 = \textstyle\sum_y \mathbb{P}_x(X_h = y) \overset{(3)}{\geq} \overbrace{\sum_y \delta_{xy}}^{1} + \Big(\overbrace{\sum_y q_{xy}}^{0} \Big) h + o(h) = 1 + o(h),$$

e podemos concluir que as $\geq$'s em (1) e (2) são $=$'s.

(b $\Rightarrow$ c) $\quad$ Façamos $P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$. Dados $x, y \in \mathcal{S}$ e $t, h > 0$:

$$P_{xy}(t+h) = \textstyle\sum_z \mathbb{P}_x(X_t = z)\mathbb{P}(X_{t+h} = y | X_t = z)$$
$$= \textstyle\sum_z P_{xz}(t)(\delta_{xy} + q_{zy} h + o(h))$$

(b $\Rightarrow$ c) (cont)

Logo,

$$\frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = \sum_z P_{xz}(t) q_{zy} + \frac{o(h)}{h};$$

segue que

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q})_{xy}.$$

Podemos repetir o argumento com $P_{xy}(t)$ e $P_{xy}(t-h)$, e obter

$$P'_{xy}(t) = \big(\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}\big)_{xy}.$$

(c $\Rightarrow$ a) Como no caso do PP.

$\square$

Obs. 1) Como $\mathcal{S}$ é finito, podemos substituir, como já vimos, a equação avançada pela equação atrasada

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), \;\; \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

(já que ambas equações têm uma única e mesma solução).

Obs. (cont)

2) Note que (b) pode ser escrita de forma matricial. Seja

$$\mathbf{P}(s,t) = \big(P_{xy}(t-s)\big)_{x,y\in\mathcal{S}}.$$

Então, (b) equivale a

$$\mathbf{P}(t,t+h) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}h + \mathbf{o}(h).$$

Logo, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0,t) &= \mathbf{P}\big(0,\tfrac{t}{n}\big)\mathbf{P}\big(\tfrac{t}{n},\tfrac{2t}{n}\big)\cdots\mathbf{P}\big(\tfrac{(n-1)t}{n},t\big)\\ &\simeq \big[\mathbf{I} + \mathbf{Q}\tfrac{t}{n} + \mathbf{o}\big(\tfrac{t}{n}\big)\big) \to e^{t\mathbf{Q}}\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

$\mathcal{S}$ infinito

Vamos escrever as equações de Kolmogorov.

Equações avançadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

ou

$$P'_{xy}(t) = \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{xz}(t)\, q_{zy},\ x, y \in \mathcal{S},\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}.$$

Equações atrasadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t),\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

ou

$$P'_{xy}(t) = \sum_{z\in\mathcal{S}} q_{xz}\, P_{zy}(t),\ x, y \in \mathcal{S},\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}.$$

Teorema 3

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz. Então a equação atrasada tem uma solução mínima não negativa $\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0$. Esta solução tem a propriedade de semigrupo:

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s+t),\ s, t \geq 0.$$

Obs. Se $\mathcal{S}$ for finito, então pelo Teo 1 do Álbum 13, temos que

$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}},$$

que pelo mesmo resultado é a única solução de ambas Equações de Kolmogorov.

Teorema 4

Seja (X_t) um processo mínimo contínuo à direita em $\mathcal{S}$ [*]. Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz em $\mathcal{S}$ com matriz de saltos $\mathbf{\Pi}$ e semigrupo $\mathbf{P}(t)$ dado acima. São equivalentes:

(a) Dados $X_0 = x$ e a cadeia de saltos $(Y_n) \sim \mathrm{CM}(\delta_x, \mathbf{\Pi})$, os tempos de visita sucessivos $T_1, T_2, \ldots$ são va's exponenciais independentes com taxas $q_{Y_0}, q_{Y_1} \ldots$, resp.

(b) Dados $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ e $x_0, \ldots < x_{n+1} \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \,|\, X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Nessas condições, chamaremos (X_t) de *PMS com gerador (ou gerado por)* $\mathbf{Q}$. Notação: $(X_t) \sim \mathrm{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$

---

[*] Vide Slide 15 do Álbum 13.

Dem. Teos 3 e 4

Seja (X_t) o PMS mínimo associado a $\mathbf{Q}$ construído no Slide 4 do Álbum 17, e seja $P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$, $\mathbf{P}(t) = (P_{xy}(t))_{x,y\in\mathcal{S}}$.

1) Vamos mostrar que $\mathbf{P}$ satisfaz a equação atrasada. Para $x, y \in \mathcal{S}$, dado T_1:

$$P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y | T_1 > t) e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, q_x e^{-q_x s} \sum_{z\neq x} \pi_{xz} P_{zy}(t-s)$$

$$= \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z\neq x} q_{xz} P_{zy}(t-s) \qquad (1)$$

Logo,

$$P_{xy}(t) e^{q_x t} = \delta_{xy} + \int_0^t ds \sum_{z\neq x} q_{xz}\, e^{q_x s} P_{zy}(s), \qquad (2)$$

o que mostra que $P_{xy}(t)$ é contínua e diferenciável (pois a série no integrando é uniformemente convergente, e logo uma função contínua).

Dem. Teos 3 e 4 (cont)

Diferenciando (2) nos dois lados:

$$q_x e^{q_x t}\, P_{xy}(t) + e^{q_x t}\, P'_{xy}(t) = \textstyle\sum_{z\neq x} q_{xz}\, e^{q_x t} P_{zy}(t),$$

e logo, cancelando $e^{q_x t}$ nos dois lados, e como $q_x = -q_{xx}$:

$$P'_{xy}(t) = \textstyle\sum_z q_{xz}\, P_{zy}(t) \tag{3}$$

2) O mesmo argumento para provar (1) (condicionando em T_1 e no destino do 1o salto, usando a Ppdde de Markov e homogeneidade temporal) também mostra que, para $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_{n+1}) = \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z\neq x} q_{xz} \mathbb{P}_z(X_{t-s} = y, t - s < S_n). \tag{4}$$

Por outro lado, se $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ satisfaz a equação atrasada (na forma diferencial), então também a satisfaz na forma integral (para ver isto, basta percorrer os passos de (1) a (3) acima em reverso).

Dem. Teos 3 e 4 (cont)

$$\tilde{P}_{xy}(t) = \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} q_{xz} \tilde{P}_{zy}(t-s). \tag{5}$$

Se $\tilde{P}_{xy}(t) \geq 0$, então

$$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_0) = 0 \leq \tilde{P}_{xy}(t) \ \forall \ x, y \in \mathcal{S}. \tag{6}$$

Substituindo (6) em (5), e usando (4), obtemos, recursivamente, $\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_n) \leq \tilde{P}_{xy}(t) \ \forall \ n$, e tomando o $\lim_{n\to\infty}$:

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) \leq \tilde{P}_{xy}(t) \qquad \square_{\text{minimalidade}}$$

3) A ppdde de semigrupo segue da Ppdde de Markov:

$$\begin{aligned} P_{xy}(s+t) &= \textstyle\sum_z \mathbb{P}_x(X_s = z)\mathbb{P}_x(X_{s+t} = y | X_s = z) \\ &= \textstyle\sum_z \mathbb{P}_x(X_s = z)\mathbb{P}_z(X_t = y) \qquad \square_{\text{Teo 3}} \end{aligned}$$

Dem. Teos 3 e 4 (cont)

4) Supondo que (X_t) satisfaz (a), como fizemos até agora, e usando a Propriedade de Markov:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

e (b) está satisfeita. Finalmente, um argumento como aquele utilizado para o Processo de Poisson mostra que (b) $\Rightarrow$ (a). $\square_{\text{Teo 4}}$

Obs. Se **Q** for não explosiva, então temos unicidade das soluções probabilísticas da equação atrasada.

Exemplo de processo não mínimo: Processo de Nascimento explosivo a partir da origem, voltando à origem (com prob 1) em ζ, e recomeçando a partir daí.

Teorema 5

A solução mínima não negativa da equação atrasada coincide com a solução mínima não negativa da equação avançada.

Dem. Livro